УДК 372.851

НЕКОТОРЫЕ МОДЕЛИ ЧИСЛОВОЙ ОКРУЖНОСТИ И ИХ НАГЛЯДНЫЕ ОБРАЗЫ

Богданова Е.А., кандидат педагогических наук, доцент,
ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева», г. Самара
bogdanovaea2014@gmail.com

Богданов П.С., кандидат физико-математических наук,
ФГАОУ ВО «Самарский национальный исследовательский университет
имени академика С.П. Королева», г. Самара
poulsmb@rambler.ru

Богданов С.Н., кандидат физико-математических наук, доцент,
Самарский филиал ГАОУ ВО «Московский городской педагогический университет», г. Самара
bogdanovsan@rambler.ru

Аннотация. В работе рассматриваются две новые модели числовой окружности – винтовая линия и спираль, которые обладают рядом преимуществ по сравнению с традиционной числовой (единичной) окружностью при их использовании в тригонометрии. Приводится пример решения задач с помощью спирали.

Ключевые слова: числовая окружность, винтовая линия, спираль, отбор корней тригонометрических уравнений.

SOME MODELS OF THE NUMERICAL CIRCLE AND THEIR INTUITIVE IMAGES

E.A. Bogdanova, candidate of pedagogic sciences, associate professor,
FSAEI HE «Samara National Research University named after academician S.P. Korolev», Samara
bogdanovaea2014@gmail.com

P.S. Bogdanov, candidate of physical and mathematical sciences,
FSAEI HE «Samara National Research University named after academician S.P. Korolev», Samara
poulsmb@rambler.ru

S.N. Bogdanov, candidate of physical and mathematical sciences, associate professor,
Samara Branch of the state autonomous educational institution
of higher education «Moscow City University», Samara
bogdanovsan@rambler.ru

Abstract. The paper considers two new models of a numerical circle - a helix line and a spiral, which have a number of advantages over the traditional numerical (unit) circle when used in trigonometry. An example of solving problems by applying a spiral is given.

Keywords: numerical circle, helix line, spiral, selection of roots of trigonometric equations

Курс тригонометрии имеет большую практическую направленность, знания по этому разделу математики применяются при изучении других предметов. Уровень освоения навыков решения тригонометрических уравнений и преобразований тригонометрических выражений проверяется на едином государственном экзамене по математике.

Фундаментом для изучения всей тригонометрии автор учебника «Алгебра и начала математического анализа 10-11» А.Г. Мордкович [1] считает усвоение модели числовой окружности, в частности, это важно и для решения уравнений с отбором корней. Он отмечает, что отбор корней в простейших тригонометрических уравнениях позволяет понять структуру формулы корней, роль параметра в ней [2].

Модель «числовая окружность» относится к знаково-символическим моделям. Отбор корней тригонометрического уравнения представляет собой использование и преобразование этой символической модели. Преобразование модели заключается в выделении дуги окружности, соответствующей заданному промежутку, и точек, интерпретирующих корни уравнения. Н.С. Салмина [4] считает, что проблемы при изучении математики возникают у школьников из-за неумения «декодировать информацию, представленную знаково-символическими средствами, идентифицировать изображение с реальностью, наличествующей в нём, выделять в моделях закономерности, зафиксированные в них, оперировать моделями, знаково-символическими средствами». В применении к нашей модели, в частности, это означает, что многие школьники не понимают, как одна и та же точка числовой окружности может соответствовать различным дугам или углам, например, $\frac{\pi}{4}$ и $\frac{9\pi}{4}$ (в учебнике А.Г. Мордковича и др. такие величины называются именами точек). Это непонимание особенно усиливается, когда начинают рассматривать принадлежность точек какому-либо промежутку.

В работе «Подготовка учителя математики» [3] отмечается, что в основе обучения лежит восприятие наблюдаемых объектов. «Чему бы ни учить, каким бы способом не учить, мы прежде всего обращаемся к органам чувств обучаемого». Благодаря органам чувств осуществляется восприятие объекта. В результате восприятия формируется образ. Чувственные образы подразделяются на первичные (образы восприятия) и вторичные (образы представления), которые формируются на основе следов памяти и образа воображения школьника.

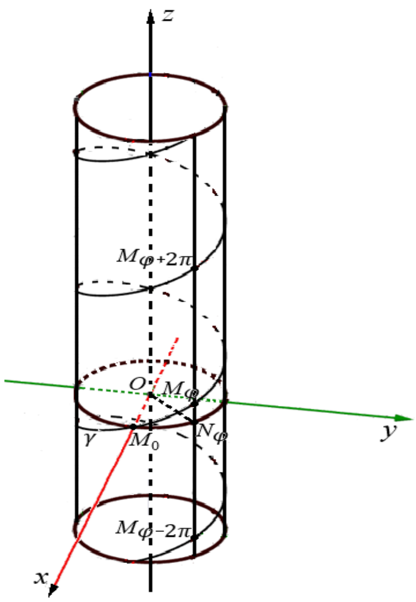

Рис. 1

С нашей точки зрения для осознанного восприятия модели «числовая окружность» можно использовать следующий зрительный образ. Представим винтовую линию в пространстве (рис.1). Пусть α - некоторая плоскость, перпендикулярная оси винтовой линии. Тогда ортогональной проекцией винтовой линии на плоскость α будет окружность ω. Пусть радиус данной окружности равен единице. Тогда, если за начало отсчета на окружности выбрать точку её пересечения с винтовой линией, и задать направление отсчета, то ω является числовой окружностью. Каждая точка окружности является образом всех точек винтовой линии, расположенных на прямой, параллельной оси этой линии, и проходящей через данную точку окружности. На рисунке 1 - это точки $M_{\varphi}, M_{\varphi-2\pi}, M_{\phi+2\pi}$. «Имена» двух таких соседних точек винтовой линии отличаются на 2π .

Полученный образ позволяет школьникам осознать факт наличия различных имён одной и той же точки N_{φ} числовой окружности.

Очевидно, что построенную модель не очень удобно использовать для отбора корней тригонометрических уравнений, так как при этом необходимо работать с пространственной фигурой, а в тетради и на доске проще изображать плоские объекты. Поэтому рассмотрим образ винтовой линии при центральном проектировании на плоскость α, выбирая центр проектирования на оси винтовой линии «выше» плоскости α. Проектировать будем ту часть винтовой линии, которая располагается «ниже» центра проектирования. Её образом является плоская спираль (рис.2), причем образы точек, лежащих выше плоскости α, принадлежат виткам спирали вне окружности ω, а образы точек, лежащих ниже плоскости α, - виткам внутри окружности ω. Зрительный образ спирали можно получить, если наблюдатель находится на оси винтовой линии внутри её. Тогда витки винтовой линии выглядят постепенно сужающимися к центру.

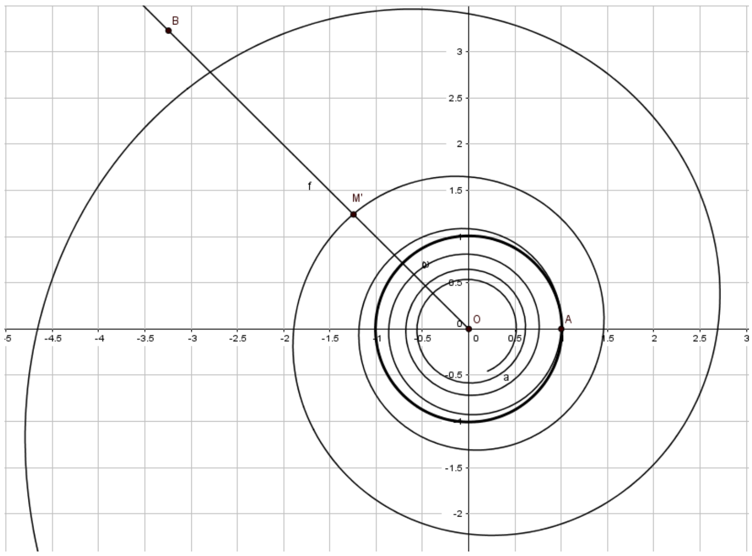

Рис. 2

Построенную модель можно использовать, например, для отбора корней тригонометрических уравнений.

Пример. Найдите все корни уравнения $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Решение. Сначала запишем все корни данного уравнения $x = \pm\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n, \quad n \in Z$. Сделаем отбор корней с помощью спирали (рис.3). Сначала от точки A по спирали отсчитываем пять прямых углов при движении против часовой стрелки, получаем точку D, затем – восемь прямых углов или два круга в том же направлении, получаем точку F. Дуга DF спирали изображает отрезок $\left[\dfrac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$. Точки E и C соответствуют углу $\dfrac{5\pi}{6}$ на числовой окружности и спирали. Точка B отличается от точки C ровно на один виток спирали в положительном направлении движения, поэтому она соответствует углу $\dfrac{5\pi}{6} + 2\pi = \dfrac{17\pi}{6}$. Как видно из рисунка, это единственный корень уравнения из серии решений $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi n$, который принадлежит отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Из методических соображений на числовой окружности удобно откладывать точки, соответствующие углам $(-2\pi; 2\pi)$. Точки L и K соответствуют углу $-\dfrac{5\pi}{6}$ на числовой окружности и спирали. Точка G отличается от точки K ровно на два витка спирали в положительном направлении движения, поэтому она соответствует углу $-\dfrac{5\pi}{6} + 4\pi = \dfrac{19\pi}{6}$. Как видно из рисунка, это единственный корень уравнения из серии решений $x = -\frac{5\pi}{6} + 2\pi n$, который принадлежит отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

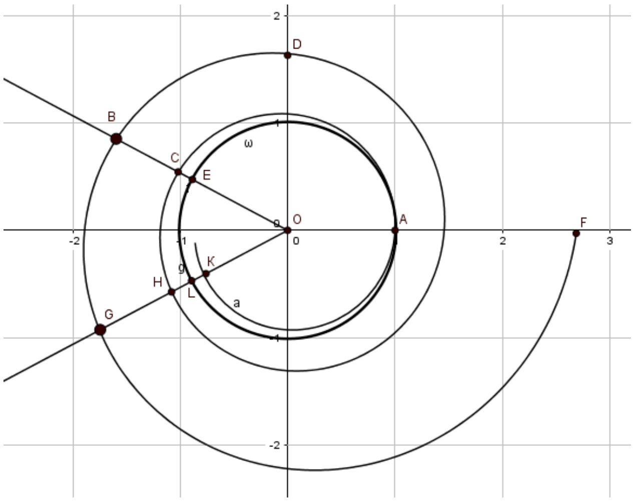

Рис. 3

Таким образом, в статье рассмотрены две различные модели и их наглядные образы, позволяющие упростить решение некоторых тригонометрических задач.

Литература

1. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. В 2 ч. Ч.1 Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (профильный уровень) / А.Г. Мордкович, П.В. Семенов. – М.: Мнемозина, 2010. – 424 с.
2. Мордкович А.Г. Методические проблемы изучения тригонометрии в общеобразовательной школе / А.Г.Мордкович // Математика в школе. - 2002. - №6. - С. 32-38.
3. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы: Учеб. пособие / Под ред. В.Д. Шадрикова. – М.: Гардарики, 2002. – 383 с.
4. Салмина Н.С. Знак и символ в обучении / Н.С.Салмина. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. - 288 с.